AMII - UTN - FRBA - 1er recuperatorio 2do parcial
2do cuatrimestre 2018 - prof. Andrea Campillo

Condición mínima para aprobar: 2 (dos) ítems prácticos bien (6 seis)
Condición mínima para aprobación directa: 3 (tres) ítems bien: uno de T1 o T2 y dos de E1, E2, E3 o E4 (6D seis aprobación directa). Para 8D (ocho aprobación directa), base 6D más un ítem bien.

1 er. Recuperatorio SEGUNDO PARCIAL (2do. Cuat. 2018)

E1) Calcular el flujo de $\overline{f}(x,y,z)=(3x+2\,\mathrm{sen}\,y\,,\,z^2+2y\,,\,-2z+e^{xy})$, a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $x \le z^2+y^2 \ \wedge \ y^2+z^2 \le 2y$. Indicar gráficamente cómo se ha orientado la superficie.

E2) Dado el campo $\overline{f}(x,y)=(y^2\,,\,2x)$, calcular la circulación de $\overline{f}$ a lo largo de la curva C, siendo C la curva integral de $y''+y'=4$ recorrida desde $(0\,,2)$ hasta $(1\,,6)$.

E3) Calcular el flujo del campo $\overline{f}(x,y,z)=(3x\,,2y\,,y+z)$ a través de la superficie S de ecuación $y=x^2$ con $0 \le z \le 9-y$. Indicar gráficamente cómo se ha orientado la superficie.

E4) Dada la integral $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} dx\,dy$

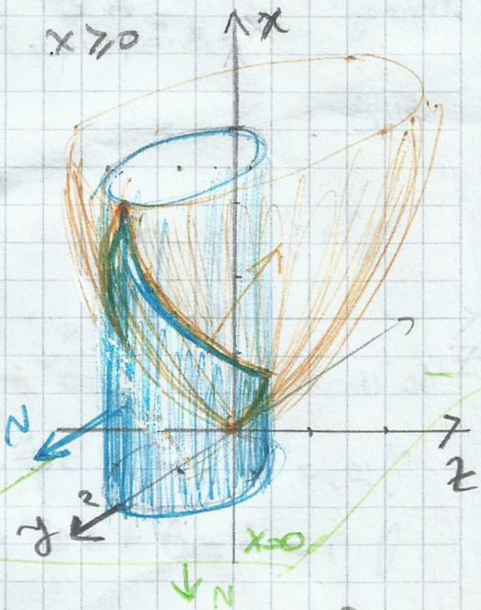
a) Expresar analíticamente la región de integración y graficarla.
b) Expresar la integral invirtiendo el orden de integración
c) Calcular el área de la región de integración.

1° rec. 2° parcial UTN

FECHA 2°c 2018

(E1) Calcular el flujo de $\bar{f}(xyz) = (3x + 2\,\text{sen}(y),\ z^2+2y,\ -2z + e^{xy})$ a través de la sup frontera del cuerpo definido por $x \le z^2+y^2 \ \wedge\ y^2+z^2 \le 2y$.
Indicar gráficamente cómo se han orientado las sup.

Falta una restricción. Voy a considerar $x \geq 0$



$0 \le x \le y^2+z^2$ → los puntos entre el plano $x=0$ y el paraboloide $x = y^2+z^2$

$y^2+z^2 \le 2y$ → $(y-1)^2+z^2 \le 1$ → los puntos adentro del cilindro corrido $r=1$ cuyo eje es $(0,t,0)$ $t\in\mathbb{R}$

→ Proyecta un círculo $r=1$ centro $(0,1,0)$ → en el plano yz

roté los ejes

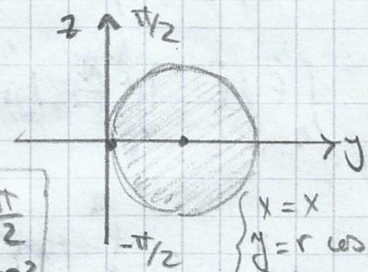
• Es una sup. cerrada, orientada al ext.

• $\bar{f}$ tiene componentes polinómicas, exponenciales y trigonom. → $\bar{f} \in C^1$

→ hallo el flujo x Gauss → $\iint_S \bar{f}\,d\bar{s} = \iiint_W \text{div}\,\bar{f}\,dvol$.

$\text{div}.\bar{f} = 3 + 2 - 2 = 3$

Proy: en yz



Límites de r

No desplazo el centro de coord:

$\boxed{\begin{matrix} -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le x \le r^2 \end{matrix}}$

$\begin{cases} x = x \\ y = r\cos(t) \\ z = r\,\text{sen}(t) \end{cases}$

$y^2+z^2 = 2y \rightarrow r^{\cancel{2}} = 2\cancel{r}\cos(t)$

$\boxed{0 \le r \le 2\cos(t)}$

C.V. Jac

$$\iint_S \bar{f}\,d\bar{s} = \iiint_W 3\,dvol \stackrel{C.V.}{=} 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos(t)}\int_0^{r^2} r\,dx\,dr\,dt =$$

$$= 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos(t)} r^3\,dr\,dt = 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\Big|_0^{2\cos(t)} dt = \frac{3}{\cancel{4}}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cancel{16}^{\,4}\cos^4(t)\,dt =$$

$$= 12 \cdot \frac{3}{8}\pi = \boxed{\frac{9}{2}\pi = \iint_S \bar{f}\,d\bar{s}}$$

Sylvina

E2) Dado el campo $\bar{F}(x,y) = (y^2, 2x)$ calcular la circulación de $\bar{F}$ a lo largo de la curva C, siendo C la curva integral de $y'' + y' = 4$ recorrida desde $(0,2)$ hasta $(1,6)$

$y'' + y' = 4 \rightarrow$ Pol. caract: $r^2 + r = 0 \rightarrow \left.\begin{matrix} r_1 = 0 \\ r_2 = -1 \end{matrix}\right\} \neq$

·Homog: $y_H = A e^{0x} + B e^{-x} \rightarrow \boxed{y_H = A + Be^{-x}}$

·Part: $y_p = cx \rightarrow y'_p = c \qquad y''_p = 0$

$y'' + y' = 4 \rightarrow 0 + c = 4 \rightarrow \boxed{c = 4} \rightarrow \boxed{y_p = 4x}$

$y_G = y_H + y_p = \boxed{A + Be^{-x} + 4x = y_G}$

Va desde $(0,2) \rightarrow x = 0 \wedge y = 2 \rightarrow y_{(0)} = 2$ y llega hasta $(1,6) \rightarrow y_{(1)} = 6$

$\left.\begin{matrix} y(0) = 2 = A + Be^{0} + 4 \cdot 0 \rightarrow A + B = 2 \\ y(1) = 6 = A + Be^{-1} + 4 \longrightarrow A + Be^{-1} = 2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \cancel{A} + B = \cancel{A} + Be^{-1} \\ B = Be^{-1} \rightarrow \boxed{B = 0} \\ \boxed{A = 2} \end{matrix}$

$\boxed{y = 4x + 2}$

$C: \bar{\gamma}_{(t)} = (t, 4t+2), \ t \in [0,1] \rightarrow \bar{\gamma}'_{(t)} = (1, 4)$

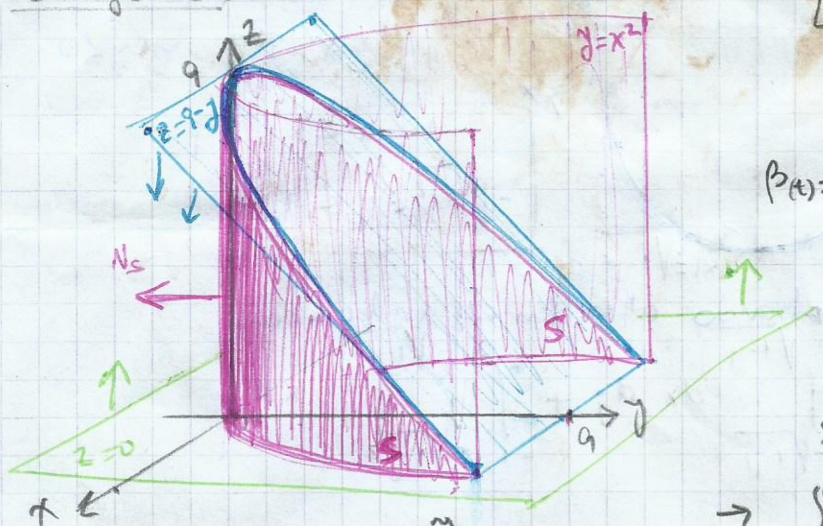
$\int_C \bar{F} \, d\bar{s} = \int_0^1 \bar{F}(\bar{\gamma}_{(t)}) \, \gamma'_{(t)} \, dt = \int_0^1 ((4t+2)^2, 2t) (1,4) \, dt =$

$= \int_0^1 16t^2 + 16t + 4 + 8t \, dt = \boxed{\frac{64}{3} = \int_C \bar{F} \, d\bar{s}}$

1° sec 2° parcial UTN

(E3) Calcular el flujo del campo $\bar{F}_{(xyz)} = (3x, 2y, y+z)$ a través de la sup S de ecuación $y = x^2$ con $0 \le z \le 9-y$.
Indicar gráficamente cómo ha orientado la superficie.

Dibujo S:



$N = (0,1,1)$

$T_1 : \sigma_{(x,y)} = (x, y, 9-y)$

Llamo T_1 a la tapa contenida en el plano $z = 9-y$

T_2 a la tapa contenida en el plano $z=0$

$\beta_{(t)} = (x, y, 0)$

$N_{T_1} = (0,1,1) \qquad N_{T_2} = (0,0,-1)$

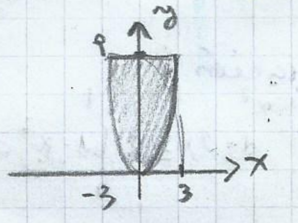
Sea W el sólido cuyas sup frontera es $S_T = S \cup T_1 \cup T_2$

Se cumplen las hip. T. Gauss

$\rightarrow \iint_{S_T} \bar{F}\, d\bar{s} = \iiint_W \operatorname{div} F \, dvol$

y (I) $\iint_{S_T} \bar{F}\, d\bar{s} = \iint_S \bar{F}\, d\bar{s} + \iint_{T_1} \bar{F}\, ds + \iint_{T_2} \bar{F}\, ds$

Proy W en xy



$-3 \le x \le 3$

$x^2 \le y \le 9$

$0 \le z \le 9-y$

$\operatorname{div} \bar{F} = 3+2+1 = 6$

$$\iint_{S_T} \bar{F}\, d\bar{s} = 3\int_{-3}^{3}\int_{x^2}^{9}\int_{0}^{9-y} dz\, dy\, dx = 3\int_{-3}^{3}\int_{x^2}^{9} 9-y \, dy\, dx = 3\int_{-3}^{3} \overbrace{9y - \frac{y^2}{2}}^{\frac{18y-y^2}{2}} \Big|_{x^2}^{9} dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-3}^{3} 18\times 9 - 9^2 - 9x^2 + x^4 \, dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{2106}{5} = \boxed{\frac{3159}{5} = \iint_{S_T} \bar{F}\, d\bar{s}}$$

$$\iint_{T_1} \bar{F}\, d\bar{s} = \iint_{T_1} \bar{F}(\sigma_{(x,y)})\, \check{N}_{T_1}\, ds = \int_{-3}^{3}\int_{x^2}^{9} (3x, 2y, y+9-y)(0,1,1)\, dy\, dx =$$

$$= \int_{-3}^{3}\int_{x^2}^{9} 2y+9 \, dy\, dx = \int_{-3}^{3} y^2 + 9y \Big|_{x^2}^{9} dx = \int_{-3}^{3} 81+81-x^4-x^2\, dx = \boxed{\frac{3564}{5} = \iint_{T_1} \bar{F} d\bar{s}}$$

$$\iint_{T_1} \bar{F}\, d\bar{s} = \int_{-3}^{3}\int_{x^2}^{9} (3x, 2y, y)(0,0,-1)\, dy\, dx = \int_{-3}^{3}\int_{x^2}^{9} -y\, dy\, dx = -\int_{-3}^{3} \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{9} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-3}^{3} 81 - x^4\, dx = \boxed{-\frac{972}{5} = \iint_{T_2} \bar{F}\, d\bar{s}}$$

(I) $\bullet \iint_S \bar{F}\, d\bar{s} = \iint_{S_T} \bar{F}\, d\bar{s} - \iint_{T_1} \bar{F}\, d\bar{s} - \iint_{T_2} \bar{F}\, d\bar{s} = \dfrac{3159 - 3564 - (-972)}{5} = \boxed{\dfrac{567}{5} = \iint_S \bar{F}\, d\bar{s}}$

E4) Dada la integral $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} dx\,dy$?

no pueden tener las mismas variables

a) Expresar analíticamente la región de integración y graficarla

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} dy\,dx \longrightarrow -1\le x\le 1 \ \wedge\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le 1-x^2$$

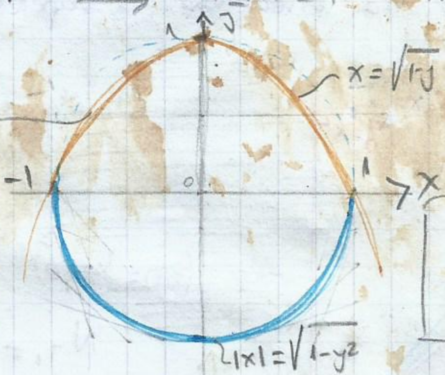
$$\sqrt{1-x^2}\ge -y$$

$$\boxed{1\ge x^2+y^2} \text{ con } y<0$$

$y=1-x^2$

$x^2=1-y$

$x=-\sqrt{1-y}$

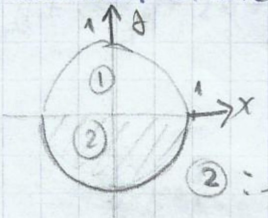


$$\boxed{\begin{array}{c} -1\le x\le 1 \\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le 1-x^2 \end{array}}$$

b) Expresar la integral invirtiendo el orden de integración

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} dy\,dx = \boxed{\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} dx\,dy + \int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\,dy}$$

c) Calcular el área de la región de integración



$$A_1=\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} dy\,dx = 2\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x^2} dy\,dx = 2\int_{0}^{1} 1-x^2\,dx = \boxed{\frac{4}{3}=A_1}$$

② : es medio círculo de radio 1 $\rightarrow \boxed{A_2=\frac{\pi}{2}}$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3}+\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{8+3\pi}{6} = A}$$